ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 91

β) Α→2 , Β →3, Γ →6 , Δ→5

Β.

α)

$z_1 = 5\,\overline{z}_2 \Leftrightarrow \kappa + 15\,i = 5(5-\lambda i)$

$\kappa + 15i = 25 - 5\lambda i$

$\kappa = 25$ και $15 = -5\lambda$

$\kappa = 25$ και $\lambda = -3$

β)

Έστω $z = x + yi$

$z\cdot\overline{z} - (z-\overline{z}) = 5 + 2i \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2yi = 5 + 2i$

$x^2 + y^2 = 5$ και $-2y = 2$

$x^2 + y^2 = 5$ και $y = -1$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ($x = 2$ και $y = -1$) ή ($x = -2$ και $y = -1$)

Άρα $z = 2 - i$ ή $z = -2 - i$

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$

β)

Για $\kappa = 17$ έχουμε $f(x) = x^2 - 17x + 1$, οπότε $f'(x) = 2x - 17$

με $f(0) = 1$ και $f'(0) = -17$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow$

$y - 1 = -17x \Leftrightarrow$

$y = -17x + 1$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$$z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1 - i$$

β)

$\rho = |z| = |1 - i| = \sqrt{2}$

$$\text{συνφ} = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \text{ημφ} = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$

Άρα η τριγωνομετρική μορφή του z είναι η $z = \sqrt{2}\left(\text{συν}\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

γ)

Ο κύκλος με κέντρο $K(2,\ 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ έχει εξίσωση $(x-2)^2 + y^2 = 2$ **(1)**
και η εικόνα του $z = 1 - i$ είναι το σημείο $M(1,\ -1)$.
Επειδή οι συντεταγμένες του M εύκολα διαπιστώνουμε ότι επαληθεύουν την εξίσωση (1), σημαίνει ότι η εικόνα του z βρίσκεται στον παραπάνω κύκλο.

ΘΕΜΑ 4ο

α)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

β)

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = 0$$

Πρόσημο της f ′ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f′		+	0	−	
f		$\nearrow$	|	$\searrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$
γνησίως φθίνουσα στο $[0,\ +\infty)$
και παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 1$

γ)

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Επίσης αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $+\infty$